

제44회 보험계리사 및 손해사정사 제2차 시험문제
(2021년도 시행)

【 재 무 관 리 및 금 융 공 학 】

1. 다음 표와 같이 3개(s_1, s_2, s_3)의 상태만 존재하는 완전시장(complete market)이 있다고 하자.

	상태1(s_1)	상태2(s_2)	상태3(s_3)
$\pi(s)$	\$0.3	\$0.4	$\pi(s_3)$
$A(s)$	\$4.0	\$5.0	\$4.0

$\pi(s)$ 는 특정한 상태(s)에서만 \$1를 지급하는 Arrow-Debreu 증권의 가격이며, $A(s)$ 는 상태 s 가 발생할 때 증권A가 지급하는 금액(payoff)이다. 증권A의 균형가격이 \$4일 때, 다음 질문에 답하십시오. (단, 계산 값은 반올림하여 소수 둘째자리까지 표시하십시오.) (15점)

- (1) $\pi(s_3)$ 를 구하십시오. (5점)
- (2) 증권A를 기초자산으로 하고, 행사가격이 \$2인 콜옵션의 균형가격을 (1)을 이용하여 구하십시오. (5점)
- (3) 어떤 상태에서도 액면가 \$100를 지급하는 무위험할인채권의 균형가격을 구하십시오. (5점)

(뒷면 계속)

2. 시간 t 에서 $x_t \equiv \log R_t$ 의 확률밀도함수를 $f(x)$ 라고 할 때 다음 분포를 따른다.

$$\log R_t \sim N(\mu, \sigma^2)$$

다음 질문에 답하십시오. (15점)

- (1) $\log R_t$ 의 확률밀도함수를 $g(x)f(x)$ 라고 할 때, 다음 분포를 따른다.

$$\log R_t \sim N(r, \sigma^2)$$

$g(x)$ 를 구하십시오. (8점)

- (2) $\log R_t$ 의 확률밀도함수를 $g(x)f(x)$ 라고 할 때, 다음 분포를 따른다.

$$\log R_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$g(x)$ 를 구하십시오. (7점)

3. 포트폴리오(P)의 시장위험을 측정하는 VaR(value at risk)은 자산수익률이 정규분포를 따른다고 가정하는 경우 다음 식에 의해 계산된다.

$$\text{VaR} = \alpha \sigma_P W$$

여기서 α 는 신뢰수준에 따른 임계값, σ_P 는 P의 수익률의 표준편차, W 는 P의 시장가치이다. P는 주식A와 주식B에 각각 600만원과 400만원을 투자한다. VaR 계산 시 95% 신뢰수준을 활용하고 이때 임계값(α)은 1.65이다.

다음 식에 의해 포트폴리오의 표준편차 계산에 필요한 주식수익률의 분산-공분산 행렬을 추정한다.

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i \quad (i = A, B)$$

$$\Sigma = \beta \beta^T \sigma_M^2 + D_\epsilon \quad (\beta = (\beta_A, \beta_B)^T)$$

여기서 R_i 는 주식 i 의 수익률, β_i 는 주식 i 의 공통요인에 대한 선형 계수,

(뒷면 계속)

R_M 은 공통요인의 수익률, ϵ_i 는 잔차, Σ 는 주식수익률들의 분산-공분산 행렬, σ_M^2 은 공통요인 수익률의 분산, D_ϵ 는 각 주식수익률의 잔차분산 ($\sigma_{\epsilon_i}^2$)이 대각항에 입력되고 나머지 값은 0인 대각행렬(diagonal matrix)이다. 위 모형을 추정한 결과는 다음과 같다. σ_M^2 은 0.05이다.

	주식A	주식B
β_i	0.8	1.2
$\sigma_{\epsilon_i}^2$	0.04	0.02

다음 질문에 답하십시오. (15점)

- (1) 주식A와 주식B 수익률의 상관계수를 구하십시오. (단, 계산 값은 반올림하여 소수 둘째자리까지 표시하십시오.) (3점)
- (2) P의 VaR 값을 구하십시오. (단, 계산 값은 반올림하여 만원 단위로 표시하십시오.) (8점)
- (3) 잔차를 고려하지 않고 β 만 고려한 모형을 이용한 P의 VaR 값을 구하십시오. (단, 계산 값은 반올림하여 만원 단위로 표시하십시오.) (4점)

4. Black-Scholes 편미분방정식(partial differential equation)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

여기서 f 는 옵션가치, S 는 주가, r 은 연간 무위험이자율, σ 는 주식수익률의 연간 변동성이다. 명시적 유한차분법(explicit finite difference method)으로 편미분방정식을 근사(approximation)하고자 한다. 이를 위하여 주가(S)와 시간(t)으로 만들어진 평면을 다음과 같은 격자(grid)로 나눈다. ($0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$)

시간 : $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, i\Delta t, \dots, T$ ($m\Delta t \equiv T$)

주가 : $0, \Delta S, 2\Delta S, \dots, j\Delta S, \dots, S_{\max}$ ($n\Delta S \equiv S_{\max}$)

(뒷면 계속)

f 가 콜옵션인 경우 시간과 관계없이 격자의 하한 $f_{i,0}$ 은 0, 상한 $f_{i,n}$ 은 $S-K$ (K : 행사가격)로 가정한다. 명시적 유한차분법은 주가와 시간에 대한 1, 2차 도함수를 다음과 같이 근사한다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{(\Delta S)^2}$$

다음 질문에 답하십시오. (단, 계산 값은 반올림하여 소수 둘째자리까지 표시하십시오.) (20점)

- (1) Black-Scholes 편미분방정식을 명시적 유한차분법에 의하여 다음 식과 같이 표현할 수 있다. b_j 와 c_j 를 A , B , Δt 만으로 완성하십시오. (6점)

$$a_j f_{i+1,j-1} + b_j f_{i+1,j} + c_j f_{i+1,j+1} = f_{i,j}$$

$$a_j = \frac{\Delta t}{1+r\Delta t}(B-A), b_j = \frac{\Delta t}{1+r\Delta t}(\quad), c_j = \frac{\Delta t}{1+r\Delta t}(\quad)$$

$$A = \frac{rj}{2}, B = \frac{\sigma^2 j^2}{2}$$

- (2) $\sigma = 40\%$, $r = 10\%$ 이다. 행사가격(K)이 20,000원, 잔존만기가 6개월인 유럽형 콜옵션의 가치를 (1)을 이용하여 다음 표와 같이 계산하고자 한다. (가), (나), (다), (라) 값을 각각 구하십시오. (10점)

	잔존만기	0.5	0.25	0
주가	$j \backslash i$	0	1	2
30,000	3	10,000	10,000	10,000
20,000	2	(가)	(나)	0
10,000	1	(다)	(라)	0
0	0	0	0	0

(뒷면 계속)

- (3) 현재 주가(S)가 20,000원일 때, (2)를 이용하여 미국형 콜옵션의 현재가치를 구하시오. (4점)

5. 연속복리(continuous compounding) 기준으로 한국과 미국의 연간 무위험이자율을 각각 r_W , $r_\$$ 라고 하자. (KRW: Korean won, USD: US dollar)

	0 (현재)	T (미래)
한국 무위험투자	1 KRW	$e^{r_W T}$ KRW
미국 무위험투자	1 USD	$e^{r_\$ T}$ USD
환율	S_0 KRW/USD	S_T KRW/USD

위 표를 이용하여 다음 질문에 답하시오. (15점)

- (1) 투자자J는 미국의 무위험이자율이 한국의 무위험이자율보다 높은 것을 보고(즉, $r_\$ > r_W$) 원화로 자금을 조달하여 달러 자산에 투자하는 캐리트레이드(carry trade)를 시도하려 한다. T 에서 J의 캐리트레이드의 1원당 순이익(net profit per KRW at T)을 원화로 구하시오. (5점)
- (2) J는 (1)과 이론적으로 동일한 캐리트레이드를 초기 투자(initial investment) 없이 효율적으로 수행하기 위하여 외환 선도계약(forward contract)을 이용하려 한다. T 에서 J의 캐리트레이드 1달러 당 순이익을 원화(net KRW profit per USD unit at T)로 구하시오. (단, 원화 기준 USD 선도가격은 F 라고 표시한다.) (5점)
- (3) 이자율평형(interest rate parity)이 성립할 때 (2)의 답을 (1)의 답으로 변환할 수 있음을 보이시오. (힌트: 이자율평형이란 이론 선도가격이 실제 거래되는 선도가격과 같은 상태를 의미한다.) (5점)

6. t 시점에서 A_t 는 여유자금, B_t 는 부채가치, π_t 는 소득, δ_t 는 총부채원리금상환비율(DSR: debt-service ratio)($\delta_t \equiv B_t/\pi_t$), m_t 는 여유자금비율

(뒷면 계속)

$(m_t \equiv A_t/B_t)$ 이다. 시간에 따라 변하지 않는 변수들은 r (여유자금의 운용수익률)과 ρ (부채증가율)이다. 다음이 성립한다고 하자.

$$dA_t = rA_t dt + \pi_t dt$$

$$dB_t = \rho B_t dt$$

다음 질문에 답하시오. (20점)

- (1) $dB_t^{-1} = -K_1 dt$ 일 때, K_1 을 구하시오. (5점)
- (2) (1)을 이용하면 $1/\delta_t = dm_t/dt - K_2$ 가 성립한다. 이때 K_2 를 구하시오. (5점)
- (3) $\delta_t = \bar{\delta}$ 로 일정하다고 하자. m_∞ 가 수렴하는 유한한 값일 때 m_∞ 를 구하시오. (5점)
- (4) 장기적 목표 DSR이 δ_{target} 이 되도록 하는 여유자금의 목표 운용수익률을 도출하고 이를 설명하시오. (5점)